ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN DUY TIN

TÌM NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẰNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN DUY TIN

TÌM NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG BẰNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN THỊ NGỌC OANH

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Trang

Danh sách hình vẽ 2

Lời nói đầu 3

Chương 1 Một số kiến thức cơ bản 5

1.1. Toán tử sai phân 5

1.2. Tính tổng 12

1.3. Biến đổi z 17

Chương 2 Giải phương trình đạo hàm riêng bằng phương trình sai phân 19

2.1. Rời rạc hóa phương trình đạo hàm riêng 19

2.2. Nghiệm của phương trình đạo hàm riêng 27

2.3. Ví dụ số 35

2.3.1. Phương trình parabolic tuyến tính 1 chiều 35

2.3.2. Phương trình parabolic tuyến tính 2 chiều 39

Phụ lục 60

Danh sách hình vẽ

2.1 Mô hình đối với phương trình truyền nhiệt 21
2.2 Lưới điểm đạt được từ trục ban đầu 22
2.3 Lưới điểm đạt được không với giá trị biên 22
2.4 Mô hình phương pháp ẩn 25
2.5 Mô hình phương trình Laplace 27
2.6 Nghiệm xấp xỉ Ví dụ 2.5 37
2.7 Nghiệm chính xác Ví dụ 2.5 38
2.8 Sai số Ví dụ 2.5 38
2.9 Nghiệm xấp xỉ Ví dụ 2.6 39
2.10 Nghiệm chính xác Ví dụ 2.6 40
2.11 Sai số Ví dụ 2.6 40
2.12 Nghiệm xấp xỉ Ví dụ 2.7 43
2.13 Nghiệm chính xác Ví dụ 2.7 43
2.14 Sai số Ví dụ 2.7 44

Lời nói đầu

Sử dụng phương trình sai phân để giải số là một phương pháp khá phổ biến và hữu hiệu khi nghiên cứu mô hình toán học liên quan tới các vấn đề trong khoa học, kỹ thuật, kinh tế và nhiễu lĩnh vực khác của thực tiễn, ta có thể tìm thấy rất nhiều ví dụ cụ thể như trong Chương 1 tài liệu [2]. Phương pháp này được đề xuất từ nửa cuối những năm 40 của thế kỷ trước và ngày càng khẳng định vai trò quan trọng trong giải tích ứng dụng và đặc biệt quan trọng trong việc nghiên cứu nghiệm số của phương trình đạo hàm riêng [1, 3].

Luận văn trình bày một số kiến thức cơ bản liên quan tới phương trình sai phân và áp dụng phương trình sai phân tìm nghiệm số phương trình đạo hàm riêng tuyến tính.

Luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1 là chương mở đầu, trình bày các kiến thức cơ bản nhất liên quan tới phương trình sai phân như: Định nghĩa và các tính chất của toán tử sai phân; định nghĩa và các tính chất của tổng bất định; biến đổi z giải phương trình sai phân. Nội dung của Chương 1 được tham khảo chủ yếu trong hai tài liệu [1, 2].

Chương 2 nghiên cứu ứng dụng phương trình sai phân vào việc tìm nghiệm số của phương trình đạo hàm riêng. Chương này cũng trình bày các bước rời rạc bài toán, nghiệm rời rạc đồng thời có các ví dụ số minh họa thông qua ngôn ngữ lập trình MATLAB. Nội dung của chương này được tham khảo chủ yếu trong hai tài liệu [1, 3].

Sau thời gian học tập và rèn luyện tại Trường Đại học Khoa học –

Đại học Thái Nguyên, bằng sự biết ơn và kính trọng, em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và các thầy cô đã nhiệt tình hướng dẫn, giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thiện đề tài luận văn Thạc sĩ này.

Đặc biệt, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Nguyễn Thị Ngọc Oanh, người đã trực tiếp hướng dẫn, giúp đỡ em trong quá trình thực hiện đề tài.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè cùng đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên trong quá nghiên cứu và hoàn thiện đề tài này.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 11 năm 2019

Học viên

Nguyễn Duy Tin

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản liên quan tới định nghĩa và tính chất toán tử sai phân, tổng bất định và biến đổi z.

1.1. Toán tử sai phân

Định nghĩa 1.1 *Cho $y(t)$ là một hàm biến thực t, toán tử sai phân Δ được xác định bởi*

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t).$$

Ví dụ 1.1 Phương pháp Euler xấp xỉ nghiệm của bài toán ban đầu

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

đạt được bằng cách thay $x^{'}(t)$ bởi $\dfrac{x(t+h) - x(t)}{h}$. Ta có

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t, x(t))$$

hay

$$x(t+h) = x(t) + hf(t, x(t)).$$

Ta sẽ sử dụng một dạng thuận tiện hơn cho phương trình sai phân này, đặt $x_n = x(t_0 + nh),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ khi đó phương trình trên có thể

được viết lại dưới dạng sau

$$x_{n+1} = x_n + hf(t, x_n(t)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

trong đó x_0 đã biết.

Xét toán tử sai phân với bước lưới $h > 0$ là $z(s+h) - z(s)$. Đặt $y(t) = z(th)$, khi đó

$$\begin{aligned} z(s+h) - z(s) &= z(th+h) - z(th) \\ &= y(t+1) - y(t) \\ &= \Delta y(t). \end{aligned}$$

Sai phân cấp cao hơn được định nghĩa bằng hợp thành của toán tử sai phân và chính nó.
Sai phân cấp hai được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(t) &= \Delta(\Delta y(t)) \\ &= \Delta(y(t+1) - y(t)) \\ &= (y(t+2) - y(t+1)) - (y(t+1) - y(t)) \\ &= y(t+2) - 2y(t+1) + y(t). \end{aligned}$$

Sai phân cấp n được xây dựng theo công thức quy nạp như sau

$$\begin{aligned} \Delta^n y(t) &= y(t+n) - ny(t+n-1) + \frac{n(n-1)}{2!} y(t+n-2) + \cdots + (-1)^n y(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(t+n-k). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Định nghĩa 1.2 *Toán tử "dịch chuyển" được định nghĩa như sau*

$$Ey(t) = y(t+1). \tag{1.4}$$

Nếu I là toán tử đồng nhất, tức là $Iy(t) = y(t)$ thì ta có

$$\Delta = E - I.$$

Các tính chất cơ bản của toán tử Δ được cho bởi định lý sau đây

Định lý 1.1 *Toán tử sai phân Δ thỏa mãn các tính chất sau đây*

a. $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$ *với mọi số nguyên dương m và n.*

b. $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$.

c. $\Delta(Cy(t)) = C\Delta y(t)$.

d. $\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t)$.

e. $\Delta\Big(\dfrac{y(t)}{z(t)}\Big) = \dfrac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}$.

Chứng minh.

a. Ta chứng minh quy nạp theo m, đẳng thức hiển nhiên đúng với $m = 1$. Giả sử đẳng thức đúng với $m = k$, ta chứng minh đúng tới $m = k + 1$. Thật vậy

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1}(\Delta^n y(t)) &= \Delta^k(\Delta(\Delta^n y(t))) \\ &= \Delta^k(\Delta^{n+1} y(t))) \\ &= \Delta^{k+n+1} y(t).\end{aligned}$$

b. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta(y(t) + z(t)) &= y(t+1) + z(t+1) - y(t) - z(t) \\ &= y(t+1) - y(t) + z(t+1) - z(t) \\ &= \Delta y(t) + \Delta z(t).\end{aligned}$$

c. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta(Cy(t)) &= Cy(t+1) - Cy(t) \\ &= C\big(y(t+1) - y(t)\big) \\ &= C\Delta y(t).\end{aligned}$$

d. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta(y(t)z(t)) &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t) \\ &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t+1) + y(t)z(t+1) - y(t)z(t) \\ &= z(t+1)\Delta y(t) + y(t)\Delta z(t) \\ &= y(t)\Delta z(t) + Ez(t)\Delta y(t).\end{aligned}$$

e. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta\Big(\frac{y(t)}{z(t)}\Big) &= \frac{y(t+1)}{z(t+1)} - \frac{y(t)}{z(t)}\\ &= \frac{y(t+1)z(t) - z(t+1)y(t)}{z(t)z(t+1)}\\ &= \frac{y(t+1)z(t) - y(t)z(t) - \big(z(t+1)y(t) - y(t)z(t)\big)}{z(t)Ez(t)}\\ &= \frac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}.\end{aligned}$$

Định lý 1.2 *Cho a là một hằng số. Khi đó*

a. $\Delta a^t = (a-1)a^t$.

b. $\Delta \sin at = 2\sin\frac{a}{2}\cos a(t+\frac{1}{2})$.

c. $\Delta \cos at = -2\sin\frac{a}{2}\sin a(t+\frac{1}{2})$.

d. $\Delta \log at = \log(1+\frac{1}{t})$.

e. $\Delta \log\Gamma(t) = \log t$, *trong đó* $\Gamma(t)$ *được xác định như sau*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-z}z^{t-1}dz.$$

Chú ý 1.1 Hàm $\Gamma(t)$ thỏa mãn tính chất

$$\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t)} = t.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\Gamma(t+1) &= \int_0^\infty e^{-z}z^t dz\\ &= [-e^{-z}z^t]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-z})tz^{t-1}dz\\ &= t\int_0^\infty e^{-z}z^{t-1}dz = t\Gamma(t).\end{aligned}$$

Chứng minh.

a. Ta có

$$\Delta a^t = a^{t+1} - a^t = (a-1)a^t.$$